ALGEBRA 3 - PRÁCTICO 6

Ejercicio 1. Sea $\mathbb{R}^4$ con el producto interno usual. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ formado por los vectores que son ortogonales a $\alpha = (1, 0, -1, 1)$ y a $\beta = (2, 3, -1, -2)$. Hallar una base de W.

Ejercicio 2. Aplicar Gram-Schmidt para resolver los siguientes puntos.

(a) Encontrar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ con el producto interno estándar a partir de la base $B = \{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 3, 4)\}$.

(b) Sea $\mathbb{C}^3$ con el producto interno canónico. Encontrar una base ortonormal del subespacio generado por $\beta_1 = (1, 0, i)$ y $\beta_2 = (2, 1, 1 + i)$.

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{P}^3$ el espacio de polinomios de grado a lo sumo 3, con el producto interno dado por

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt.$$

(a) Hallar el complemento ortogonal del subespacio de los polinomios escalares.

(b) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, x, x^2, x^3\}$.

Ejercicio 4. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita y sea $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base ortonormal de V. Probar que para todo par de vectores α y β en V:

$$(\alpha|\beta) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha|\alpha_k)\overline{(\beta|\alpha_k)}.$$

Ejercicio 5. Sea W el espacio de $\mathbb{R}^2$ generado por $(3, 4)$. Sea E la proyección ortogonal sobre W.

(a) Hallar una fórmula para $E(x, y)$ y la matriz de E en la base canónica.

(b) Hallar $W^\perp$.

(c) Dar una base ortonormal en la cual la matriz de E sea $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Ejercicio 6. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita, y sea $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base ortonormal de V. Sea T un operador lineal en V y A la matriz de T en la base B. Probar que

$$A_{ij} = (T\alpha_j|\alpha_i).$$

Ejercicio 7. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Se define la distancia entre dos vectores α, $\beta \in V$ como $d(\alpha, \beta) = ||\alpha - \beta||$. Mostrar que

(a) $d(\alpha, \beta) \geq 0$ para todo $\alpha, \beta \in V$.

(b) $d(\alpha, \beta) = 0$ si y sólo si $\alpha = \beta$.

(c) $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$ para todo $\alpha, \beta \in V$.

(d) $d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \alpha)$ para todo $\alpha, \beta, \gamma \in V$.

Ejercicio 8. Sea $V = M_n(\mathbb{C})$ con el producto interno dado por $(A|B) = tr(AB^*)$. Encontrar el complemento ortogonal al subespacio de matrices diagonales.

Ejercicio 9. Sea S un subconjunto de un espacio producto interno V. Probar que $\left(S^{\perp}\right)^{\perp}$ contiene al subespacio generado por S. Si V es de dimensión finita probar que $\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = \langle S \rangle$.

Ejercicio 10. Sea V el espacio producto interno real de las funciones continuas a valores reales definidas en $[-1,1]$ con el producto interno

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt.$$

Sea W el espacio de funciones impares (i.e. cumplem $f(-t) = -f(t)$). Encontrar el complemento ortogonal de W.

Ejercicio 11. Consideremos $\mathbb{C}^2$ con el producto interno usual. Sea T el operador lineal dado por $Te_1 = (1,2)$ y $Te_2 = (i,-1)$. Encontrar $T^*\alpha$ para $\alpha = (x_1, x_2)$.

Ejercicio 12. Sea T el operador lineal en $\mathbb{C}^2$ definido por $Te_1 = (1+i, 2)$ y $Te_2 = (i, i)$. Usando el producto interno usual encontrar la matriz de T^* en la base ordenada canónica. ¿Conmuta T con T^*?

Ejercicio 13. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita y T un operador lineal sobre V. Demostrar que $\operatorname{Im}(T^*) = \ker(T)^{\perp}$. Concluir que $V = \ker T \oplus^{\perp} \operatorname{Im} T^*$.

Ejercicio 14. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita y T un operador lineal sobre V. Si T es inversible, probar que T^* es inversible y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Ejercicio 15. Probar que el producto de dos operadores autoadjuntos es autoadjunto si, y sólo si, los dos operadores conmutan.

Ejercicio 16. Sea V el espacio vectorial de los polinomios sobre $\mathbb{R}$ de grado menor o igual que 3 con el producto interno $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

(a) Si $t \in \mathbb{R}$, hallar el polinomio g_t de V tal que $(f|g_t) = f(t)$ para todo f de V.

(b) Hallar D^* onde D es el operador derivación sobre V.

Ejercicio 17. Sea $V = M_n(\mathbb{C})$ con el producto interno $(A|B) = \operatorname{tr}(AB^*)$. Sea $P \in V$ inversible, y sea T_P el operador lineal sobre V definido por $T_P(A) = P^{-1}AP$. Hallar el adjunto de T_P.

Ejercicio 18. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita y sea E un operador lineal idempotente sobre V; es decir, $E^2 = E$. Demostrar que E es autoadjunto si y sólo si $EE^* = E^*E$.

Ejercicio 19. Sea V un espacio producto interno complejo de dimensión finita, y sea T un operador en V. Probar que T es autoadjunto si y sólo si $(T\alpha|\alpha) \in \mathbb{R}$ para todo α en V.